Beregninger i en vilkårlig trekant

Dette tillæg handler om relationer, som gælder mellem sider og vinkler i en *vilkårlig trekant*. Formel c) blandt cosinusrelationerne kan for eksempel opfattes som en udvidelse af *Pythagoras' sætning*, der jo kun gælder i retvinklede trekanter.

Cosinusrelationerne

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A)$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)$

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$

Hvis man skal benytte cosinusrelationerne til at beregne vinkler, kan ovenstående formler med fordel omskrives til:

d) $\cos(A) = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$

e) $\cos(B) = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$

f) $\cos(C) = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$

Sinusrelationerne

(g) $\dfrac{a}{\sin(A)} = \dfrac{b}{\sin(B)} = \dfrac{c}{\sin(C)}$

Sinusrelationerne kan også skrives således, hvor brøkerne blot er vendt "på hovedet":

(h) $\dfrac{\sin(A)}{a} = \dfrac{\sin(B)}{b} = \dfrac{\sin(C)}{c}$

Det er en fordel at benytte den version, hvor den ubekendte kommer til at stå i tælleren, så man undgår for mange omskrivninger. Endelig har vi nogle formler for arealet af en vilkårlig trekant:

Arealformler

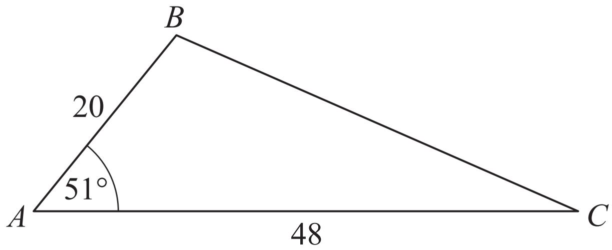
i) $T = \frac{1}{2} ab \cdot \sin(C)$

j) $T = \frac{1}{2} ac \cdot \sin(B)$

k) $T = \frac{1}{2} bc \cdot \sin(A)$

Pas på med at bruge sinusrelationerne til at bestemme vinkler

Vi skal i dette afsnit se, hvorfor man skal passe på med at benytte sinusrelationerne til at bestemme vinkler. Lad os kigge på et eksempel.



Lad os sige, at vi starter med at finde siden a først. Hertil benyttes formel (a):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A) = 48^2 + 20^2 - 2 \cdot 48 \cdot 20 \cdot \cos(51°) = 1495{,}70485$$

idet vi husker at tage mange cifre med i mellemregninger. Heraf fås:

(1) $$a = \sqrt{1495{,}70485} = 38{,}67434$$

Næste skridt er at finde vinklen B. Her ser det umiddelbart ud som om vi både kan bruge sinus- og cosinusrelationerne, da der kun forekommer én ubekendt heri. Vi starter med cosinusrelationerne:

$$\cos(B) \;=\; \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \;=\; \frac{48^2 - 38{,}67434^2 - 20^2}{-2 \cdot 38{,}67434 \cdot 20} \;=\; -0{,}2639$$

hvilket giver $B = \cos^{-1}(-0{,}2639) = 105{,}3°$.

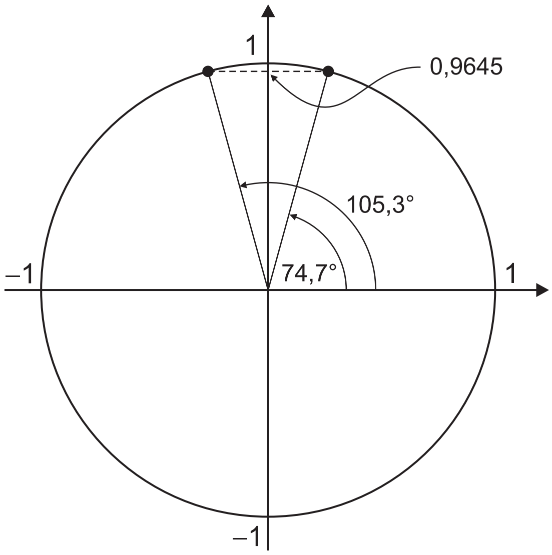
Dårlig metode

Nu prøver vi at løse opgaven med sinusrelationerne i stedet. Vi kender parret a og A. Vi skal finde B, så vi tager naturligvis også parret b og B. Det betyder, at vi af h) får:

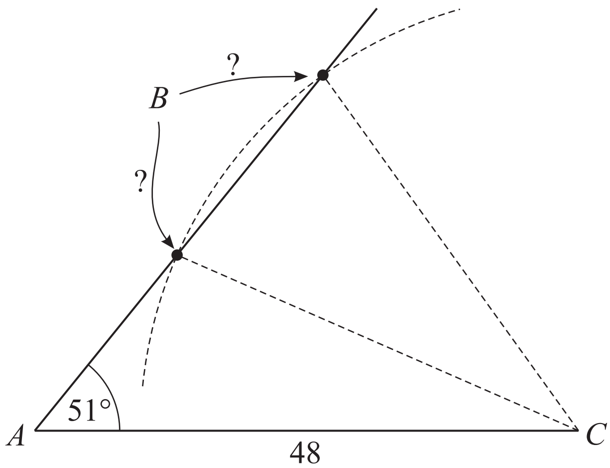
$$\sin(B) \;=\; b \cdot \frac{\sin(A)}{a} \;=\; 48 \cdot \frac{\sin(51°)}{38{,}67434} \;=\; 0{,}9645$$

Her kunne man så tro, at man bare kan tage den omvendte funktion til sinus for at finde B, men der er et problem. Ligningen $\sin(B) = 0{,}9645$ har nemlig *to løsninger!* Det ses på enhedscirklen på figur 1 på næste side. Vi kan ikke umiddelbart vide, hvilken en af vinklerne, som er den rigtige … den ene er 180° minus den anden! Hvis vi prøver at *konstruere* trekanten med passer og lineal med de oplysninger vi har, kan vi også se problemet. På figur 2 er siden AC tegnet til at være 48, vinklen A er tegnet med en vinkelmåler til at være 51°. Oplysningen om a, som vi fandt i (1) ovenfor, udnyttes til med en passer at lave en cirkelbue, som skærer vinkelbenet fra vinklen A *to steder*! Det kan kun afgøres hvilken ét af punkterne, som er det korrekte ved at udnytte oplysningen om c, men det er ikke helt nemt. Figur 3 på næste side viser, hvorfor problemet *aldrig* opstår under anvendelse af cosinusrelationen. Den ene af de to vinkler, der får ved løsning af vores ligning $\cos(B) = -0{,}2639$, er over 180° og kan afvises, da vinkelsummen i en trekant er 180°!

Figur 1



Figur 2



Figur 3